学校编码：10384　　　　分类号＿＿＿＿ 密级＿＿＿
学号：19020111152546　　　　UDC＿＿＿

硕 士 学 位 论 文

基于速度-加速度反馈的部分二次特征值配置问题的优化算法

An Optimization Method for Partial Quadratic Eigenvalue Assignment in Vibrating Systems Using Velocity-Plus-Acceleration Feedback

周 琳

指导教师姓名：白　正　简　教授
专 业 名 称：计　算　数　学
论文提交日期：2014　年　4　月
论文答辩日期：2014　年　　月
学位授予日期：2014　年　　月

答辩委员会主席：＿＿＿＿＿
评　　阅　　人：＿＿＿＿＿

2014 年　月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　年　月　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

中文摘要

二阶动力系统广泛应用于结构动力学和工程振动控制领域，如桥梁、地震工程、大型空间结构控制、结构动力学中的振动分析、阻尼陀螺系统和机器人控制设计等。为了描述振动结构体的振动特性（自然频率和模态），工程实践者往往通过有限元方法将振动结构体离散得到一个二阶常微分方程。然而，由此二阶离散模型预测得到的振动特征通常和对实际结构体测量得到的动态行为不一致。模型修正问题就是通过测量得到的特征信息对原始二阶模型进行修正。数学上，我们称之为二次特征值配置问题。另外，在工程控制设计中，为了消除振动结构体因外力引起的共振等危险振动，工程实践者往往采取主动控制，即利用状态反馈控制外力作用于结构体，使得结构体拥有指定的振动特性。部分二次特征值配置问题就是利用反馈控制外力将结构体的可能导致共振等危险行为的自然频率加以替换，同时使得振动结构体剩余的固有自然频率和模态保持不变（即保持无溢出性）。这类问题在工程控制设计等领域中有着广泛的应用背景。

近年来，有关部分二次特征值配置问题的理论和数值方法有很大进展。现有算法大多采用基于速度-位移的状态反馈控制。最近，由于加速度传感器的广泛运用，已有文献研究基于速度-加速度的反馈控制的二次特征值配置问题。

本论文主要研究基于速度-加速度反馈的部分二次特征值配置问题。为了减少能量消耗、噪声扩张以及降低修正后的模型对参数扰动的敏感性，我们提出一类优化算法。基于部分二次特征值配置问题的参数解，我们给出反映范数最小化和鲁棒性的最优价值函数，推导出其梯度的明确表达式并给出相应的优化算法。最后，我们给出数值实验用以验证该算法的有效性。

关键词： 二阶控制系统，部分二次特征值配置问题，速度-加速度反馈矩阵，最小范数，鲁棒性。

Abstract

Second-order dynamic systems arise in a wide variety of practical applications such as structural dynamics and industrial vibrations. This includes bridges, earthquake engineering, control of large flexible space structures, vibration control in structural dynamics, robotics control, etc. To describe dynamical behaviors (natural frequencies and model shapes) of a vibrating system, engineering practicers often discretize a vibration structure into a second-order differential equation by using finite element techniques. However, the natural frequencies predicted by the second-order model often disagree with those measured experimentally from a practical vibration structure. A model updating problem aims to update the original model via the measured eigendata. Mathematically, this is called a partial quadratic eigenvalue assignment problem. In addition, in engineering design, to avoid some dangerous vibrations (e.g, resonance) caused by external forces, an engineer may employ an active control strategy, i.e., apply the feedback control force to the vibration structure and reassign the given natural frequencies to it. A partial quadratic eigenvalue assignment problem is to find some feedback control force such that the few natural frequencies, which may cause the resonance and other dangerous vibrations, are replaced by the prescribed ones while the remaining natural frequencies and model shapes are kept unchanged (i.e., keep the no spill-over property). Such problems arise in many engineering applications including engineering control design, etc.

There is a large development in theoretic and algorithmic aspects of partial quadratic eigenvalue assignment problems for vibrating systems. Most existing methods are based on the displacement-velocity feedback control. Recently, because of wide use of acceleration sensors, there is some literature related to the partial quadratic eigenvalue assignment problem via velocity-acceleration feedback.

This thesis focuses on the partial quadratic eigenvalue assignment problem using velocity-acceleration feedback. To reduce energy consumption, noise amplification, and sensitivity to model parameter perturbations, we propose a new optimization method. Based on the parametric solution to the partial quadratic eigenvalue assignment problem, we give a new cost function to reflect both minimum norm and robustness. We derive the explicit gradient expression for the cost function and give the corresponding optimization algorithm. Finally, we present some numerical experiments to show the effectiveness of the proposed method.

Key words: Second-order control systems, partial quadratic eigenvalue assignment problem, velocity-acceleration feedback matrices, minimum norm, robustness.

目 录

Contents

第一章 引言

在现实中，很多物理系统可以由二阶微分方程刻画。自然地，二阶动力系统在振动工程中有着非常广泛的应用，例如桥梁、地震工程、大型挠性空间结构控制、结构动力学中的振动分析、阻尼陀螺系统和机器人控制设计等。在实际工程设计应用中，工程师往往通过有限元技巧将振动结构体离散为如下二阶常微分控制系统：

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t), \tag{1-1}$$

其中M, D, K是$n \times n$实矩阵，t表示时间，$x(t)$是n维向量，$f(t)$是外力。对于振动结构体来说，矩阵M，D，K分别表示质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵，且M，D，K是实对称矩阵，M为正定矩阵，K为半正定矩阵。$x(t)$，$\dot{x}(t)$和$\ddot{x}(t)$分别代表位移、速度和加速度向量。

通过分离变量$x(t) = xe^{\lambda t}$，x为待确定的常向量。系统(1-1)的齐次方程的解由下面的二次特征值问题([62])决定：

$$P(\lambda)x := (\lambda^2 M + \lambda D + K)x = 0, \tag{1-2}$$

其中$P(\lambda) := (\lambda^2 M + \lambda D + K)$称为开环二次束，向量$x$称为开环二次束$P(\lambda)$关于特征值$\lambda$的特征向量。如果$M$是非奇异矩阵，开环二次束$P(\lambda)$有$2n$个有限的特征对$\{(\lambda_j, x_j)\}_{j=1}^{2n}$。这些特征值和特征向量直接反映出振动系统的振动特征，即自然频率和模态。在一些实际应用中，由模型(1-1)计算得到的自然频率和模态并不能反映出振动结构体的振动特征，即这些计算得到的自然频率和模态往往与对实际结构体测量得到的自然频率和模态不一样。因此，我们需要对现有模型进行修正。另外，像桥梁、高层建筑、汽车等很多振动结构体在受到地震和大风等外力的作用时，外力的振动频率会非常接近结构体本身的自然频率，从而导致共振等危险现象的发生。我们知道，共振会对结构体造成非常严重的破坏。

为了真实地反映出振动结构体的振动特征同时为了避免共振和系统的不稳定性，我们有必要修正现有模型。在工程上，工程师往往采取积极主动控制，即利用状态反馈控制外力作用于振动结构体，使得结构体拥有测量得到的自然频率或指定的自然频率，同时保持结构体剩余的固有自然频率和模态保持不变，工程动力学中称为无溢出性。数学上，我们称之为部分二次特征值配置问题。我们可以采用多输入状

态反馈控制外力如下

$$f(t) := Bu(t), \tag{1-3}$$

其中B是$n \times m(m \leq n)$控制矩阵，$u(t)$是控制向量。一般情况下，我们假设控制矩阵B是列满秩矩阵。

下面我们分别回顾基于位移-速度状态反馈的部分二次特征值问题和基于速度-加速度状态反馈的部分二次特征值问题的研究进展情况：

1.1 基于位移-速度反馈的部分二次特征值配置问题

我们知道，基于位移-速度的状态反馈控制外力为(1-3)，其中向量$u(t)$具有如下特殊形式：

$$u(t) = F^T \dot{x}(t) + G^T x(t), \tag{1-4}$$

其中$n \times m$阶实矩阵F和G分别表示待确定的速度反馈矩阵和位移反馈矩阵。

将基于位移-速度的状态反馈控制外力为(1-3)和(1-4)代入二阶常微分方程(1-1)，我们可得到如下闭环控制系统：

$$M\ddot{x}(t) + (D - BF^T)\dot{x}(t) + (K - BG^T)x(t) = 0 \tag{1-5}$$

利用分离变量法，我们可知闭环系统(1-5)的振动特征，即自然频率和模态可由如下二次特征值问题的特征值和特征向量来决定：

$$P_c^{[1]}(\lambda)x := \big(\lambda^2 M + \lambda(D - BF^T) + (K - BG^T)\big)x = 0,$$

其中

$$P_c^{[1]}(\lambda) := \lambda^2 M + \lambda(D - BF^T) + (K - BG^T)$$

称为闭环二次束。

假设我们已经知道开环二次束$P(\lambda)$的部分不理想的特征值和相应的特征向量，例如那些引起共振或导致系统不稳定的特征值。**基于位移-速度状态反馈控制的部分二次特征值配置问题**旨在寻找实的$n \times m$阶主动速度反馈矩阵F和位移反馈矩阵G使得闭环二次束$P_c^{[1]}(\lambda)$拥有测量得到的部分特征值或者指定的部分特征值用以替换掉开环二次束$P(\lambda)$的部分不理想的特征值同时保持开环二次束$P(\lambda)$剩余的大部分特征值和特征向量不变，即保持无溢出性。

为了实际有效性，这样的控制设计有必要满足鲁棒性。这就要求要寻找的$n \times m$阶主动速度反馈矩阵F和位移反馈矩阵G的范数比较小以便消耗较少的能量并降低噪声扩张。再者，设计要使得所得的闭环二次束的特征值对系统物理参数的扰动不敏感。这就是所谓的**基于位移-速度状态反馈控制的最小范数部分二次特征值配置问题和鲁棒部分二次特征值配置问题**。

一个可能的办法是将基于位移-速度状态反馈控制的部分二次特征值配置问题转化为如下的一阶状态反馈极点配置问题。首先将二阶控制系统(1-1)，(1-3)和(1-4)转化为如下广义一阶状态控制系统：

$$\mathcal{E}\dot{q}(t) = \mathcal{A}_g q(t) + \mathcal{B}_g u(t), \tag{1-6}$$

其中

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_g = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & -D \end{bmatrix},$$

$$q(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}.$$

如果质量矩阵M是可逆矩阵，则广义一阶状态控制系统(1-6)可简化为如下标准一阶状态控制系统：

$$\dot{q}(t) = \mathcal{A}q(t) + \mathcal{B}u(t), \tag{1-7}$$

其中

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B \end{bmatrix}.$$

系统(1-7)的振动特征可由如下的线性特征值问题的特征值和特征向量来决定：

$$L(\lambda)q := (\lambda I_{2n} - \mathcal{A})q = 0, \tag{1-8}$$

其中$L(\lambda) := \lambda I_{2n} - \mathcal{A}$称为线性束。容易验证，如果$(\lambda, x)$是二次特征值问题(1-2)的一个特征对，则$(\lambda, q)$是线性特征值问题(1-8)的一个特征对，其中

$$q = \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix}.$$

注意到由(1-4)给出的向量$u(t)$可表示为

$$u(t) = \mathcal{F}q(t) \tag{1-9}$$

其中

$$\mathcal{F} := [G^T, F^T] \in \mathbb{R}^{m\times 2n}$$

称为状态反馈矩阵。这里，$\mathbb{R}^{m\times n}$表示全体$m\times n$阶实矩阵的集合。

于是，当质量矩阵M可逆时，我们将(1-9)代入(1-7)可得一阶闭环系统

$$\dot{q}(t) = (\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{F})q(t),$$

其中$\mathcal{A}_c := \mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{F}$称为闭环状态矩阵。

因此，基于位移-速度状态反馈控制的部分二次特征值配置问题可转化为如下**部分线性特征值配置问题**: 寻找$m\times 2n$阶状态反馈矩阵$\mathcal{F}$使得闭环状态矩阵$\mathcal{A}_c$拥有测量得到的部分特征值或者指定的部分特征值用以替换掉开环线性束$L(\lambda)$的部分不理想的特征值同时保持开环线性束$L(\lambda)$剩余的大部分特征值和特征向量不变，即保持无溢出性。

对于一阶控制系统的完备或部分特征值配置问题的理论和数值方法，我们可以参考文献[16,18,22,29,32,37,38,63–65]等。

然而，这种将二阶控制系统转化为一阶控制系统的方法有几个计算方面的缺陷:

1. 系统维数从n维增加到$2n$维。这增加了计算复杂度;
2. 要计算一个可能病态的质量矩阵M的逆矩阵。这可能会导致计算结果不可靠;
3. 原有矩阵M，D，K的对称性，正定性，稀疏性结构会丢失;
4. 很多现有的特征值数值计算方法往往针对小规模问题，如果我们将其用于大规模特征值问题的计算，可能导致计算得到的特征值和特征向量不准确。

近年来，为了解决如上所述的实际工程计算困难，用于直接求解基于位移-速度状态反馈控制的部分二次特征值配置问题的理论和算法设计得到了很大发展. 有关基于位移-速度状态反馈控制的部分二次特征值配置问题的理论和计算方法，我们可以参考文献[17,20,22,25–28,30,31,33,47,50,58,69]等；有关基于位移-速度状态反馈控制的最小范数和鲁棒性部分二次特征值配置问题的理论和计算方法，我们可以参考文献[12,14,15,17,19,21,40–42,55,66]等。最近有基于测量得到的响应率信息的特征值配置问题，我们可以参考文献[11,43,44,51,52]等.

1.2 基于速度-加速度反馈的部分二次特征值配置问题

在许多实际问题中，如在地震中，地面和建筑物等结构体在运动，很难测量结构体的位移响应；在机械系统的振动抑制中，加速器是主要的传感器，通过反馈，从测量的加速度量得到速度量，这些是系统状态的导出量。通过利用导出的反馈控制量，可以解决相应的基于速度反馈的线性控制系统的极点配置问题和基于速度-加速度反馈的二次特征值配置问题。在本论文中我们主要讨论基于速度-加速度反馈的部分二次特征值配置问题。

我们首先介绍基于速度-加速度反馈的部分二次特征值配置问题。我们研究二阶控制系统(1-1)，其中多输入状态反馈控制外力为(1-3)，向量$u(t)$具有如下特殊形式：

$$u(t) = F_a^T \ddot{x}(t) + F_v^T \dot{x}(t) \tag{1-10}$$

其中$n \times m$阶实矩阵F_a和F_v分别表示待确定的加速度反馈矩阵和速度反馈矩阵。

现在将基于速度-加速度的状态反馈控制外力(1-3)和(1-10)代入二阶常微分方程(1-1)，我们可得到如下闭环控制系统：

$$(M - BF_a^T)\ddot{x}(t) + (D - BF_v^T)\dot{x}(t) + Kx(t) = 0 \tag{1-11}$$

同样，利用分离变量法，我们可知闭环系统(1-11)的自然频率和模态由如下二次特征值问题的特征值和特征向量决定：

$$P_c^{[2]}(\lambda)x := \big(\lambda^2(M - BF_a^T) + \lambda(D - BF_v^T) + K\big)x = 0,$$

其中

$$P_c^{[2]}(\lambda) := \lambda^2(M - BF_a^T) + \lambda(D - BF_v^T) + K$$

称为闭环二次束。

假设我们已经知道开环二次束$P(\lambda)$的部分特征值和相应的特征向量可能会引起共振或导致系统不稳定。则我们可以考虑如下**基于速度-加速度状态反馈控制的部分二次特征值配置问题：** 寻找$n \times m$阶主动加速度反馈矩阵F_a和速度反馈矩阵F_v使得闭环二次束$P_c^{[2]}(\lambda)$拥有测量得到的部分特征值或者指定的部分特征值用以替换掉开环二次束$P(\lambda)$的部分不理想的特征值同时保持开环二次束$P(\lambda)$剩余的大部分特征值和特征向量不变，即保持无溢出性，还要使得更新后的质量矩阵$(M - BF_a^T)$是可逆矩阵。